

# Содержание

Предисловие..... 10

Введение ..... 13

## ▼ Глава 1

Суть и цели математического моделирования  
систем автоматического регулирования ..... 15

1.1. Формы представления математических моделей ..... 15

1.1.1. Основные математические модели ..... 15

1.1.2. Математические модели САР в пространстве состояний ..... 24

1.2. Математические модели внешних воздействий ..... 31

1.2.1. Детерминированные воздействия ..... 32

1.2.2. Случайные воздействия ..... 35

1.3. Компьютерное моделирование САР ..... 38

1.3.1. Цели моделирования САР ..... 38

1.3.2. Анализ устойчивости и качества САР ..... 39

1.3.3. Коррекция САР ..... 43

1.3.4. Оптимизация САР ..... 53

1.3.5. Упрощение математических моделей САР с учетом малых  
параметров ..... 55

1.3.6. Характеристики, режимы работы и цели моделирования  
релейных САР ..... 57

1.3.7. Моделирование САР с микроЭВМ ..... 63

Контрольные вопросы и задания ..... 70

## ▼ Глава 2

Основные сведения о программном обеспечении SimInTech и рекомендации по его использованию .....	72
2.1. Принципы и методика моделирования САР .....	72
2.2. Запуск программного обеспечения SimInTech .....	78
2.3. Командное меню главного окна .....	79
2.4. Панели инструментов главного окна и схемных окон .....	82
2.5. Палитра компонентов .....	86
2.6. Краткое описание процедур и этапов работы в среде SimInTech .....	88
Контрольные вопросы и задания .....	89

## ▼ Глава 3

Лабораторные работы.....	90
Работа 1. Изучение ПО SimInTech на примерах моделирования отдельных элементов САР.....	90
Контрольные вопросы и задания.....	101
Работа 2. Изучение программного обеспечения SimInTech на примерах моделирования линейных САР.....	107
Контрольные вопросы и задания.....	124
Работа 3. Исследование корректирующих элементов САР .....	125
Контрольные вопросы и задания.....	134
Работа 4. Параметрическая оптимизация САР.....	134
Контрольные вопросы и задания.....	149
Работа 5. Моделирование релейных САР .....	149
Контрольные вопросы и задания.....	153
Работа 6. Моделирование нелинейных САР с помощью блока Язык программирования .....	153
Варианты индивидуальных заданий.....	173
Контрольные вопросы и задания.....	175
Работа 7. Моделирование САР с помощью блока Переменные состояния .....	175
Демонстрационный пример .....	176
Варианты индивидуальных заданий.....	186
Контрольные вопросы и задания.....	186
Работа 8. Моделирование цифровых САР.....	187
Демонстрационный пример .....	187
Контрольные вопросы и задания.....	200

## ▼ Глава 4

Курсовое проектирование .....	201
4.1. Основные рекомендации для выполнения курсовой работы .....	201
4.1.1. Тема работы и задание .....	201
4.1.2. Содержание работы .....	202
4.1.3. Методические рекомендации по выполнению работы .....	202
4.1.4. Рекомендации по оформлению работы .....	203
4.2. Пример выполнения курсовой работы на тему «Определение параметров типового закона регулирования САР давления в ресивере» .....	205
4.2.1. Исходные данные .....	205
4.2.2. Определение параметров заданного типового закона регулирования .....	209
4.2.3. Выводы по работе .....	218
4.3. Рекомендации к курсовому проектированию применительно к цифровым САР .....	219
4.3.1. Разработка упрощенной принципиальной и составление функциональной схем САР .....	220
4.3.2. Составление структурной схемы САР .....	223
4.3.3. Обоснование типа структурной модели .....	225

## ▼ Приложение А

К построению структурных схем систем автоматического регулирования .....	231
А.1. Функциональные элементы и схемы .....	231
А.2. Передаточные функции и структурные схемы .....	233

## ▼ Приложение Б

Задания по линейным системам автоматического регулирования .....	241
Б.1. Система автоматического регулирования температуры в помещении .....	241
Б.2. Система автоматического регулирования температуры в печи .....	243
Б.3. Система автоматического регулирования температуры теплоносителя зерносушилки .....	245
Б.4. Система автоматического регулирования угловой скорости двигателя постоянного тока .....	246

Б.5. Система автоматического регулирования частоты синхронного генератора.....	248
Б.6. Система автоматического регулирования температуры в атмосфере теплицы.....	250
Б.7. Система автоматического регулирования давления в ресивере.....	252
Б.8. Астатическая система автоматического регулирования угловой скорости гидротурбины.....	253
Б.9. Статическая система автоматического регулирования угловой скорости гидротурбины.....	255
Б.10. Система автоматического регулирования перемещения рабочего органа робота-манипулятора.....	257
Б.11. Следящая система.....	259
Б.12. Гидравлическая система автоматического регулирования скорости вращения паровой турбины.....	260
Б.13. Система автоматического регулирования угла крена самолета.....	263
Б.14. Система автоматического регулирования скорости стола обрабатывающего станка.....	264
Б.15. Система автоматического регулирования скорости самолета.....	265
Б.16. Вариантные задания.....	265

## ▼ Приложение В

Задания по нелинейным и дискретным системам автоматического регулирования.....	269
В.1. Релейная система автоматического регулирования температуры в помещении.....	269
В.2. Релейная система автоматического регулирования температуры в печи.....	270
В.3. Релейная система автоматического регулирования температуры теплоносителя зерносушилки.....	271
В.4. Релейная система автоматического регулирования угловой скорости электродвигателя постоянного тока.....	271
В.5. Нелинейная система автоматического регулирования частоты синхронного генератора.....	272
В.6. Релейная система автоматического регулирования температуры в атмосфере теплицы.....	272
В.7. Релейная система автоматического регулирования давления в ресивере.....	273
В.8. Нелинейная астатическая система автоматического регулирования угловой скорости гидротурбины.....	274
В.9. Релейная статическая система автоматического регулирования угловой скорости гидротурбины.....	274
В.10. Дискретная система автоматического регулирования температуры в помещении.....	275

V.11. Дискретная система автоматического регулирования температуры в печи.....	276
V.12. Дискретная система автоматического регулирования температуры теплоносителя зерносушилки .....	276
V.13. Дискретная система автоматического регулирования угловой скорости двигателя постоянного тока .....	277
V.14. Дискретная система автоматического регулирования частоты синхронного генератора.....	278
V.15. Дискретная система автоматического регулирования температуры в атмосфере теплицы .....	280
V.16. Дискретная система автоматического регулирования давления в ресивере .....	281
V.17. Дискретная система автоматического регулирования угловой скорости гидротурбины .....	282
V.18. Вариантные задания .....	283

## ▼ Приложение Г

Описание объектов регулирования .....	286
Г.1. Производственное помещение как объект автоматического регулирования .....	286
Г.2. Обогреваемый пол как объект автоматического регулирования.....	288
Г.3. Звено робота с электрическим приводом как объект автоматического регулирования .....	289
Г.4. Шахтная зерносушилка как объект автоматического регулирования .....	291
Г.5. Поворотное устройство солнечной батареи как объект автоматического регулирования .....	295
Г.6. Силовой трансформатор как объект автоматического регулирования .....	299
Г.7. Электрический привод патрона токарного станка как объект автоматического регулирования.....	300
Г.8. Подогреватель мазута как объект автоматического регулирования.....	302
Г.9. Мармитная плита как объект автоматического регулирования .....	303
Г.10. Электрический вулканизатор как объект автоматического регулирования .....	304

## ▼ Приложение Д

К моделированию САР с микроЭВМ.....	305
Д.1. Принципы построения и работы САР с микроЭВМ .....	305
Д.2. Математическое описание дискретных систем автоматического регулирования .....	310
Д.2.1. Понятие импульсной и цифровой систем .....	310
Д.2.2. Математическое описание импульсных систем.....	312

Д.2.3. Математическое описание цифровых систем.....	319
Д.2.4. Определение периода квантования непрерывных сигналов в цифровых системах .....	325
Д.3. Математическое описание систем автоматического регулирования с микропроцессорными регуляторами .....	329
Д.3.1. Общие сведения.....	329
Д.3.2. Алгоритмы функционирования регуляторов ТРМ.....	335
Д.3.3. Математическое описание САР с регуляторами ТРМ.....	337
Д.4. Регулирующие микропроцессорные контроллеры.....	340
Д.4.1. Контроллеры Ремиконт Р-130 .....	340
Д.4.2. Контроллеры Ремиконт Р-130ISa.....	342

## ▼ Приложение E

Задания для самоконтроля и тестирования.....	343
E.1. Линейная САР с единичной ОС .....	343
E.2. Скорректированная линейная САР с единичной ОС .....	343
E.3. Линейная САР температуры в атмосфере теплицы .....	345
E.4. Нелинейная САР с единичной ОС.....	346
E.5. Релейная САР температуры проточного водонагревателя.....	347
E.6. Оптимизация нелинейной САР с несколькими ОС.....	348
E.7. Линейная САР (вариант 1).....	349
E.8. Линейная САР (вариант 2) .....	351
E.9. Линейная САР (вариант 3).....	352
E.10. Линейная САР (вариант 4).....	353
E.11. Линейная САР (вариант 5).....	354
E.12. Линейная САР (вариант 6).....	355
E.13. Линейная САР (вариант 7).....	357
E.14. Линейная САР (вариант 8).....	358
E.15. Линейная САР (вариант 9).....	359
E.16. Линейная САР (вариант 10) .....	360
E.17. Линейная САР (вариант 11).....	362
E.18. Линейная САР (вариант 12).....	363
E.19. Линейная САР (вариант 13).....	364
E.20. Линейная САР (вариант 14).....	365
E.21. Линейная САР (вариант 15).....	366
E.22. Линейная САР (вариант 16).....	368
E.23. Линейная САР (вариант 17).....	369
E.24. Линейная САР (вариант 18).....	370
E.25. Линейная САР (вариант 19).....	372
E.26. Линейная САР (вариант 20).....	373

## ▼ Приложение Ж

Фрагменты библиотек SimInTech.....	375
Ж.1. Библиотека «Источники» .....	375
Ж.2. Библиотека «Операторы» .....	378
Ж.3. Библиотека «Динамические» .....	381
Ж.4. Библиотека «Нелинейные» .....	389
Ж.5. Библиотека «Субструктуры».....	396
Ж.6. Библиотека «Данные» .....	400
Ж.7. Библиотека «Дискретные» .....	405

## ▼ Приложение З

Дополнения к лабораторным работам .....	408
3.1. Дополнение к лабораторной работе 6. Блок Язык программирования как алгоритмическое средство программирования.....	408
Пример 1. Моделирование поступательного движения тела с учетом силы сухого трения.....	409
Пример 2. Моделирование процесса одномерной теплопроводности.....	412
3.2. Дополнение к лабораторной работе 8. Моделирование цифровых САР с учетом дискретизации сигналов в АЦП.....	416
Литература.....	422

# Предисловие



Учебными программами по дисциплинам, изучающим автоматику, теорию автоматического управления и регулирования, наряду с теоретическим обучением предусматривается практическое изучение автоматических систем на реальных образцах и макетах, а также на основе математических моделей, реализуемых с помощью современных компьютерных прикладных программ. Такие программные средства способствуют оптимизации образовательного процесса как с целью непосредственного освоения методов теории автоматических систем, так и с целью приобретения практических навыков автоматизированного проектирования автоматических устройств и систем на их основе. К их числу относятся высокоэффективные как зарубежные (Simulink, Skilab, MATRIX, VisSim, LabVIEW и др.), так и отечественные (МИК, ПА 9, CLASSIC, MBTU, SimInTech и др.) системы автоматизации динамических расчетов (САДР).

В силу сложившихся обстоятельств в отечественной высшей школе в настоящее время доминируют преимущественно зарубежные программы. Они успешно используются многими российскими вузами в учебном процессе и активно продвигаются на отечественный рынок программных средств (так, например, торговая сеть технической литературы буквально «наводнена» различными учебными изданиями по пакету Simulink; подобная ситуация имеет место и по многим другим зарубежным программам). Применение зарубежных программных средств, при наличии отечественных альтернативных программ, противоречит наметившейся в последнее время тенденции импортозамещения в различных отраслях народно-хозяйственной деятельности РФ, в том числе и в области информационных технологий в части программного обеспечения (ПО). В этой связи следует особо отметить, что многие ведущие отечественные университеты, можно сказать, предвосхитили возникшую в настоящее время проблему импортозамещения в области ПО. Ими к концу прошлого века были созданы программы визуального программирования с русскоязычной справочной системой и удобным для отечественных пользователей интерфейсом, не уступающие по своим функциональным возможностям и характеристикам зарубежным аналогам. К числу таких программ относятся перечисленные выше отечественные программы. Из них особого внимания заслуживает программное обеспечение «Среда динамического моделирования технических систем SimInTech» (называемого далее по тексту учебного пособия как ПО SimInTech, среда SimInTech или SimInTech), разработанное коллективом



ученых и выпускников Московского государственного технического университета (МГТУ) им. Н. Э. Баумана и ООО «3В Сервис» ([www.3v-services.com](http://www.3v-services.com)). По своей идеологии построения и основной сущности среда SimInTech является программным средством, создание которого и его широкое внедрение в отечественную высшую школу и научно-техническую сферу под названием программный комплекс «Моделирование в технических устройствах» (ПК МВТУ) были начаты в начале 90-х годов прошлого столетия. Название SimInTech является сокращением от перевода на английский язык оригинального названия ПК МВТУ (Моделирование В Технических Устройствах, Simulation In Technic).

Являясь альтернативой зарубежным аналогам, ПО SimInTech позволяет рассчитывать, моделировать, исследовать и синтезировать различные технические устройства (механические, гидравлические, теплотехнические, электротехнические и др., в том числе средства и системы автоматики). Вся необходимая сопроводительная документация, методическое обеспечение и исчерпывающая справочная контекстная система SimInTech выполнена на русском языке, что для многих российских пользователей снимает языковой барьер, который имеет место при освоении и использовании таких программ, как Simulink и др., с англоязычным методическим и справочным сопровождением.

Визуальные, интерактивные средства программирования, используемые в среде SimInTech, сопроводительная документация и методическое обеспечение, отличающиеся «прозрачностью» и доступностью для понимания, позволяют пользователю, при наличии элементарных навыков работы в среде операционной системы Windows, за кратчайший срок изучить его и успешно работать в его среде. Программное обеспечение SimInTech совместимо с ОС «Гослинукс», являющейся дистрибутивом сертифицированной в России свободно и открыто распространяемой операционной системы Linux, что немаловажно при необходимости перехода с ОС Windows на ОС Linux.

На основе изложенного выше, учитывая многолетний позитивный опыт применения различных версий ПК МВТУ (в учебном процессе и научных исследованиях многих вузов России и стран СНГ), а также положительные результаты проектных работ, выполненных ООО «3В Сервис», ОАО «Гипротрубопровод» и др. на основе SimInTech [1–3], авторский коллектив посчитал целесообразным его применение в качестве программного обеспечения для учебного пособия. Использована версия 1.6.0.1 ПО SimInTech, подробная информация о котором размещена на официальном сайте [simintech.ru](http://simintech.ru).

Для изучения методов математического моделирования автоматических систем, предусмотренных рамками учебного пособия, достаточно знать принципы работы и основные положения теории систем автоматического регулирования, а также, как отмечалось ранее, иметь навыки работы в среде ОС Windows.

Глава 1 содержит последовательное взаимосвязанное описание форм представления математических моделей САР в виде систем дифференциальных и алгебраических уравнений, передаточных функций, структурных схем и в пространстве состояний на конкретных примерах автоматических систем. Рассмотрены цели

и суть компьютерного моделирования САР. Кратко изложены методики анализа устойчивости, качества, коррекции и параметрической оптимизации систем регулирования применительно к их компьютерному моделированию.

В главе 2 приводятся основные сведения о SimInTech, принципы и методика моделирования САР в этой среде, а также практические рекомендации по использованию данного программного обеспечения.

В главе 3 представлено методическое обеспечение цикла лабораторных работ применительно к системам автоматического регулирования (линейным, нелинейным импульсным и цифровым). В результате выполнения этого цикла приобретаются навыки работы в среде SimInTech и закрепляются знания основных положений теории автоматического регулирования.

Глава 4 содержит методическое обеспечение курсового проектирования на основе ПО SimInTech.

Пособие дополняют 9 приложений (одно из них в электронном виде), включающих в себя необходимый справочный материал, варианты индивидуальных заданий для лабораторных работ и курсового проектирования, тестирующие задания и др. Многовариантность заданий этих приложений позволяет повысить эффективность учебного процесса посредством обязательного выполнения индивидуальных заданий каждым обучающимся.

Отдельное электронное приложение «Интерактивные структурные модели» с разработанными моделями в среде SimInTech, которые использованы в учебном пособии, размещено на официальных сайтах издательства «ДМК Пресс» (<http://dl.dmkpress.com/978-5-97060-482-3.zip>) и ООО «ЗВ Сервис» (<http://simintech.ru/books/978-5-97060-482-3.zip>).

Учебное пособие является результатом коллективного труда сотрудников ООО «ЗВ Сервис» (А. М. Щекатуров), МГТУ им. Н. Э. Баумана (О. С. Козлов), АЧИИ (Б. А. Карташов, Е. А. Шабаев).

Успешная реализация проекта разработки данного учебного пособия не была бы возможна без помощи, поддержки и одобрения специалистов в области автоматического управления и информационных технологий. В связи с этим авторы считают своим долгом выразить признательность коллективу ООО «ЗВ Сервис», предложившему идею проекта, за поддержку на всех этапах его выполнения и в частности его куратору А. Н. Петухову за организационно-методологическую помощь и содействие в издании книги. Авторы благодарны профессорам: А. Е. Городецкому, С. В. Оськину, Ю. М. Смирнову, Ю. А. Суднику за рецензирование учебного пособия, полезные замечания и рекомендации которых были учтены при его окончательном редактировании, а также генеральному директору ПО «ОВЕН» Д. В. Крашенинникову за предоставленную возможность использования материалов официального сайта [www.owen.ru](http://www.owen.ru).

# Введение



Одно из центральных мест в автоматике, наряду с системами логического управления (СЛУ), занимают замкнутые системы управления с обратными связями, называемые системами автоматического регулирования (САР). Им присущи два режима работы – динамический (переходный) и статический (установившийся), которые могут иметь устойчивые или неустойчивые (не пригодные для работы системы) переходные процессы. В связи с этим одной из задач, решаемой при проектировании новых и эксплуатации действующих САР, является их исследование на устойчивость. Помимо требования устойчивости, любая САР должна обладать определенными показателями качества процесса регулирования, удовлетворяющими требованиям технологического процесса. Поэтому исследование качества САР является следующей задачей при их создании и эксплуатации. Если в процессе решения этих задач, относящихся в теории автоматического регулирования к так называемому разделу «Анализ САР», получены неудовлетворительные результаты (система оказалась неустойчивой или имеет неудовлетворительные показатели качества), то приходится решать еще третью задачу – задачу из раздела «Синтез САР». При решении задачи синтеза систему дополняют корректирующими элементами с определенной структурой и посредством их параметрической оптимизации достигают выполнения условия устойчивости САР и желаемых показателей качества процессов регулирования. Для решения задач анализа и синтеза систем классическая теория автоматического управления и регулирования располагает достаточно обширным арсеналом эффективных аналитических и графоаналитических методов и подходов [4–6]. В последние десятилетия для решения этих задач широко применяют технологии, ориентированные на использование методов компьютерного моделирования. Их использование позволяет автоматизировать проектирование САР, упростить наладку систем в эксплуатационных условиях, существенно сократив при этом временные и интеллектуальные затраты. В основу таких компьютерных технологий положены высокоэффективные прикладные программы, о которых говорилось в предисловии. Эти программы удобны, просты в использовании и не требуют от пользователя специальной подготовки программиста. Для практического решения задач анализа и синтеза САР на их основе достаточно определенного минимума знаний по теории систем автоматического регулирования в объеме главы 1 и приложений А и Д учебного пособия.

Обобщенная сущность компьютерного моделирования САР с учетом методологии учебного пособия заключается в следующем:

- на первом этапе составляют математическую модель системы (математическое описание) в виде одной из форм, рассмотренных в п. 1.1;
- на втором этапе, руководствуясь целями решаемой задачи, реализуют эту модель посредством компьютера в среде SimInTech.

# Суть и цели математического моделирования систем автоматического регулирования



## 1.1. Формы представления математических моделей

### 1.1.1. Основные математические модели

Математическое моделирование технических систем, в том числе САУ и САР, базируется на математических моделях. Под термином **математическая модель** понимается записанная в форме математических соотношений совокупность знаний, представлений и гипотез о технической системе.

Первичной (исходной) формой представления математической модели (математическим описанием) любой САР является система дифференциальных и алгебраических уравнений, отображающих динамические свойства объекта регулирования и элементов системы (регулятора). Эти уравнения могут быть определены *аналитически* на основе законов физики, положенных в основу работы объекта регулирования и элементов системы, или *экспериментально* с использованием методов активного или пассивного эксперимента.

Аналитический метод определения математических моделей автоматических систем рассмотрим на примере простейшей САР температуры в камере для термической обработки деталей механизмов и машин при их производстве, которая представлена на рис. 1.1, где: 1 – термическая камера; 2 – термопара; 3 – детали, подлежащие термической обработке; 4 – нагревательный элемент; 5 – исполнительный орган – тиристорный регулятор напряжения; 6 – силовой блок; 7 – блок управления тиристорами; 8 – электронный усилитель постоянного тока; 9 – задающий резистор; ОР – объект регулирования; РО – регулирующий орган; ИО – исполнительный орган; УО – усилительный орган; СО – сравнивающий орган; ЗО – задающий орган; ВО – воспринимающий орган.

Объектом регулирования в данной САР является термическая камера с размещенными в ней деталями. Регулируемая величина – температура в камере  $\theta_k$  – зависит от возмущающего воздействия – температуры окружающей среды  $\theta_o$ . Величину  $\theta_k$  можно регулировать, изменяя регулирующее воздействие – температуру нагревательного элемента  $\theta_n$ .

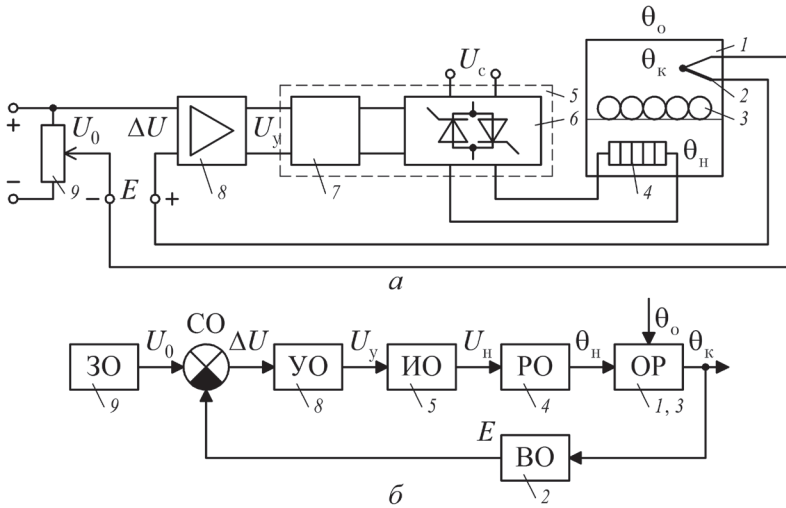


Рис. 1.1. Принципиальная (а) и функциональная (б) схемы САР температуры в термической камере

Данная САР работает следующим образом. Для измерения температуры в термической камере 1 имеется термопара 2, сигнал которой – ЭДС  $E$  сравнивается с задающим (опорным) сигналом  $U_0$ . Изменяя опорное напряжение  $U_0$  с помощью резистора 9, подключенного к стабилизированному источнику постоянного тока, задают необходимую температуру в камере. При этом входные и выходные величины элементов САР ( $\Delta U = U_0 - E$ ;  $U_y$ ;  $U_n$ ;  $\theta_n$ ) будут иметь определенные значения, соответствующие заданному значению температуры.

Если, например, внешнее возмущение – температура окружающей среды  $\theta_o$  уменьшилась, то снизится и температура  $\theta_k$  внутри термической камеры. Это, в свою очередь, приведет к уменьшению сигнала термопары  $E$  и к росту сигнала рассогласования  $\Delta U = U_0 - E$ , что вызовет увеличение напряжения  $U_n$  на нагревательном элементе, выделяемой им мощности  $P_n$  и его температуры  $\theta_n$ . Увеличение последней приведет к росту температуры  $\theta_k$  до заданного значения. Увеличение температуры окружающей среды  $\theta_o$ , по аналогии с изложенным выше, вызовет обратный эффект (увеличение  $\theta_k$ ,  $E$  и уменьшение  $U_y$ ;  $U_n$ ;  $\theta_n$ ).

Задача построения математической модели данной САР состоит в определении уравнений, отображающих взаимосвязи выходных и входных величин объекта регулирования и элементов системы в динамическом режиме.

В динамическом режиме работы любой САР регулируемая величина, а также входные и выходные величины изменяются во времени  $t$ . Поэтому все рассмотренные ранее величины применительно к САР (см. рис. 1.1) будут переменными во времени, и их следует записывать так:  $\theta_o(t)$ ,  $\theta_n(t)$ ,  $\theta_k(t)$ ,  $E(t)$ ,  $\Delta U(t)$ ,  $U_y(t)$ ,  $U_n(t)$ . Для упрощения записи допускается изображение переменных величин без указания времени  $t$ , что и будет использовано при дальнейшем изложении.

Математическую модель объекта регулирования (термической камеры совместно с деталями) определяют на основе уравнения теплового баланса:

$$C_{\kappa} m_{\kappa} \frac{d\theta_{\kappa}}{dt} = \Phi_{\text{пк}} - \Phi_{\text{ок}}, \quad (1.1)$$

где  $C_{\kappa}$  – усредненная теплоемкость, определяемая теплоемкостью воздуха внутри камеры и деталей;

$m_{\kappa}$  – усредненная масса, определяемая массами воздуха и деталей;

$\Phi_{\text{пк}}$  – поток теплоты, поступающий в камеру от нагревательного элемента;

$\Phi_{\text{ок}}$  – поток теплоты, отводимый из камеры через стенки в окружающую среду.

Поток теплоты, поступающий в камеру от нагревателя:

$$\Phi_{\text{пк}} = \alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} (\theta_{\text{н}} - \theta_{\kappa}), \quad (1.2)$$

где  $\alpha_{\text{н}}$  – коэффициент теплоотдачи нагревательного элемента;

$F_{\text{н}}$  – площадь поверхности нагревательного элемента.

Поток теплоты, отводимый из камеры:

$$\Phi_{\text{ок}} = \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}} (\theta_{\kappa} - \theta_{\text{о}}), \quad (1.3)$$

где  $\alpha_{\text{о}}$  – коэффициент теплоотдачи ограждения (стенок) камеры;

$F_{\text{о}}$  – площадь теплоотдающей поверхности стенок камеры.

С учетом формул (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) после несложных преобразований примет вид:

$$\frac{C_{\kappa} m_{\kappa}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} + \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}} \frac{d\theta_{\kappa}}{dt} + \theta_{\kappa} = \frac{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} + \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}} \theta_{\text{н}} + \frac{\alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} + \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}} \theta_{\text{о}},$$

или

$$C_{\kappa} \frac{d\theta_{\kappa}}{dt} + \theta_{\kappa} = k_{\kappa} \theta_{\text{н}} + k_{\text{о}} \theta_{\text{о}}. \quad (1.4)$$

Постоянную времени  $T_{\kappa}$  камеры и коэффициенты передачи  $k_{\kappa}$  и  $k_{\text{о}}$  определяют по формулам:

$$C_{\kappa} = \frac{C_{\kappa} m_{\kappa}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} + \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}}; \quad k_{\kappa} = \frac{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} + \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}}; \quad k_{\text{о}} = \frac{\alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}} + \alpha_{\text{о}} F_{\text{о}}}.$$

Математическая модель регулирующего органа (нагревательного элемента) определяется по аналогии с изложенным ранее на основе уравнения теплового баланса:

$$C_{\text{н}} m_{\text{н}} \frac{d\theta_{\text{н}}}{dt} = P_{\text{н}} - \Phi_{\text{пк}}, \quad (1.5)$$

где  $C_{\text{н}}$  и  $m_{\text{н}}$  – соответственно удельная теплоемкость и масса нагревательного элемента;

$P_{\text{н}}$  – мощность нагревательного элемента.

С учетом формулы (1.2) уравнение (1.5) после соответствующих преобразований примет вид:

$$\frac{C_{\text{н}} m_{\text{н}}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}}} \frac{d\theta_{\text{н}}}{dt} + \theta_{\text{н}} = \frac{P_{\text{н}}}{\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}}} + \theta_{\text{к}}. \quad (1.6)$$

Вводя обозначения  $T_{\text{н}} = C_{\text{н}} m_{\text{н}} / (\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}})$  и  $k_{\text{н}} = 1 / (\alpha_{\text{н}} F_{\text{н}})$ , уравнение (1.5) можно окончательно записать так:

$$T_{\text{н}} \frac{d\theta_{\text{н}}}{dt} + \theta_{\text{н}} = k_{\text{н}} P_{\text{н}} + \theta_{\text{к}}, \quad (1.7)$$

где  $T_{\text{н}}$  и  $k_{\text{н}}$  – соответственно постоянная времени и коэффициент передачи нагревательного элемента.

Мощность нагревательного элемента:

$$P_{\text{н}} = U_{\text{н}}^2 / R, \quad (1.8)$$

где  $U_{\text{н}}$  – напряжение на нагревательном элементе;  
 $R$  – активное сопротивление нагревательного элемента.

Таким образом, динамика нагревательного элемента описывается уравнениями (1.7) и (1.8).

Для получения **математической модели** (дифференциального уравнения) **воспринимающего органа** (термопары) запишем уравнение теплового баланса:

$$C_{\text{т}} m_{\text{т}} \frac{d\theta_{\text{т}}}{dt} = \Phi_{\text{пт}}, \quad (1.9)$$

где  $C_{\text{т}}$  и  $m_{\text{т}}$  – соответственно удельная теплоемкость и масса термопары;  
 $\theta_{\text{т}}$  – температура термопары;  
 $\Phi_{\text{пт}}$  – поток теплоты, поступающий к термопаре из воздушного пространства камеры.

Поток теплоты:

$$\Phi_{\text{пт}} = \alpha_{\text{т}} F_{\text{т}} (\theta_{\text{к}} - \theta_{\text{т}}), \quad (1.10)$$

где  $\alpha_{\text{т}}$  – коэффициент теплоотдачи от воздуха к термопаре;  
 $F_{\text{т}}$  – площадь поверхности термопары.

С учетом (1.10) уравнение (1.9) примет вид:

$$C_{\text{т}} m_{\text{т}} \frac{d\theta_{\text{т}}}{dt} + \alpha_{\text{т}} F_{\text{т}} \theta_{\text{т}} = \alpha_{\text{т}} F_{\text{т}} \theta_{\text{к}}. \quad (1.11)$$

Вводим обозначение:

$$T_{\text{т}} = \frac{C_{\text{т}} m_{\text{т}}}{\alpha_{\text{т}} F_{\text{т}}},$$

где  $T_{\text{т}}$  – постоянная времени термопары.

Тогда уравнение теплового баланса окончательно запишем так:

$$T_{\text{т}} \frac{d\theta_{\text{т}}}{dt} + \theta_{\text{т}} = \theta_{\text{к}}. \quad (1.12)$$



Это уравнение отображает только термический процесс в термопаре. По условию же задачи необходимо определить взаимосвязь температуры в камере  $\theta_k$  с ЭДС термопары  $E$ . Зависимость ЭДС термопары от ее температуры  $\theta_T$  можно приближенно описать так:

$$E = k_T \theta_T, \quad (1.13)$$

где  $k_T$  – коэффициент, определяемый по графику градуировочной (статической) характеристики термопары (рис. 1.2) как отношение приращений  $\Delta E$  к  $\Delta \theta_T$  в рабочей зоне:  
 $k_T = \Delta E / \Delta \theta_T$ .

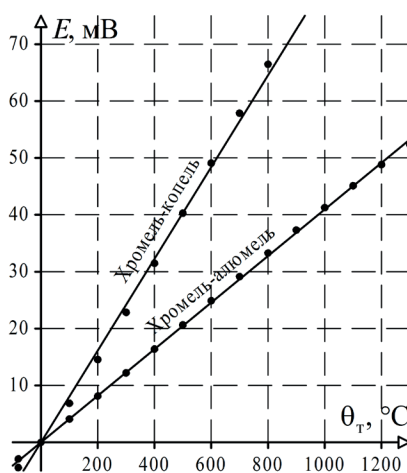


Рис. 1.2. Градуировочные характеристики термопар

Исключая в уравнениях (1.12) и (1.13) промежуточную переменную  $\theta_T$  и учитывая, что

$$\theta_T = \frac{1}{k_T} E, \quad \frac{d\theta_T}{dt} = \frac{1}{k_T} \frac{dE}{dt},$$

получим окончательно дифференциальное уравнение термопары:

$$T_T \frac{d}{dt} + E = k_T \theta_k. \quad (1.14)$$

Следует подчеркнуть, что при определении математических моделей термической камеры, нагревательного элемента и термопары использован один физический принцип (закон) теплотехники – принцип теплового баланса. Это обусловлено тем, что работа (физическая суть) камеры, нагревателя и термопары основана на тепловых процессах.

Остальные элементы рассматриваемой САР (см. рис. 1.1) – тиристорный регулятор напряжения (ИО) и электронный усилитель (УО) – являются электротехническими устройствами. Их математические модели можно определить на основе законов электротехники. Эти элементы относятся к электронным устройствам,

в которых входные сигналы передаются на выход практически без каких-либо временных задержек, так как ток в них создается за счет электронов и «дырок», обладающих сверхмалой массой. Поэтому математические модели тиристорного регулятора напряжения (усилителя) и электронного усилителя описываются соответственно следующими алгебраическими уравнениями:

$$U_n = k_{тр} U_y; U_y = k_э \Delta U, \tag{1.15}$$

где  $k_{тр}$  и  $k_э$  – коэффициенты усиления соответственно тиристорного регулятора и электронного усилителя.

Вывод уравнений (1.15), выполненный на основе законов Кирхгофа, можно найти в любом учебнике по электронике.

Таким образом, с учетом зависимости  $\Delta U = U_0 - E$ , отображающей обратную связь в системе, на основе уравнений (1.4), (1.7), (1.8), (1.14) и (1.15) **математическая модель САР температуры** в термической камере может быть представлена следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_k \frac{d\theta_k}{dt} + \theta_k = k_k \theta_n + k_o \theta_o; \\ T_t \frac{d}{dt} + E = k_t \theta_k; \\ \Delta U = U_0 - E; \\ U_y = k_э \Delta U; \\ U_n = k_{тр} U_y; \\ P_n = U_n^2 / R; \\ T_n \frac{d\theta_n}{dt} + \theta_n = k_n P_n + \theta_k. \end{array} \right. \tag{1.16}$$

Анализ системы уравнений (1.16) показывает, что рассматриваемая САР нелинейная. Ее нелинейность обусловлена наличием нелинейного алгебраического уравнения (1.8). Это уравнение можно привести к линеаризованному виду, используя известные в теории автоматического регулирования методы линеаризации [6–9], основываясь на следующих рассуждениях.

Рассматриваемая система стабилизации температуры в термической камере (см. рис. 1.1) предназначена для поддержания температуры в камере  $\theta_k$  на заданном уровне. При работе системы величина  $\theta_k$  изменяется в пределах малых отклонений  $\pm \Delta \theta_k$  относительно заданного значения. В пределах малых отклонений будут изменяться также все входные и выходные величины элементов САР, в том числе и напряжение  $U_n$  на нагревательном элементе и его мощность  $P_n$  соответственно относительно значений  $U_{н0}$  и  $P_{н0}$  (здесь  $U_{н0}$  и  $P_{н0}$  – напряжение на нагревательном элементе и его мощность, соответствующие установившемуся заданному значению температуры в камере).

Для линеаризации уравнения (1.8) воспользуемся аналитическим методом линеаризации, разложив его в ряд Тейлора, при  $U_{\text{H}} = U_{\text{H}0}$ :

$$P_{\text{H}} = P_{\text{H}0} + \left( \frac{dP_{\text{H}}}{dU_{\text{H}}} \right)_{U_{\text{H}}=U_{\text{H}0}} \frac{(U_{\text{H}} - U_{\text{H}0})}{1!} + \left( \frac{d^2P_{\text{H}}}{dU_{\text{H}}^2} \right)_{U_{\text{H}}=U_{\text{H}0}} \frac{(U_{\text{H}} - U_{\text{H}0})^2}{2!} + \\ + \left( \frac{d^3P_{\text{H}}}{dU_{\text{H}}^3} \right)_{U_{\text{H}}=U_{\text{H}0}} \frac{(U_{\text{H}} - U_{\text{H}0})^3}{3!} + \dots$$

Пренебрегая нелинейными членами ряда ввиду их малости, получим:

$$P_{\text{H}} - P_{\text{H}0} = \left( \frac{dP_{\text{H}}}{dU_{\text{H}}} \right)_{U_{\text{H}}=U_{\text{H}0}} \frac{(U_{\text{H}} - U_{\text{H}0})}{1!}.$$

Так как  $P_{\text{H}} - P_{\text{H}0} = \Delta P_{\text{H}}$ , а  $U_{\text{H}} - U_{\text{H}0} = \Delta U_{\text{H}}$ , то линеаризованное уравнение в пределах малых отклонений мощности  $\Delta P_{\text{H}}$  и напряжения  $\Delta U_{\text{H}}$  можно записать в следующем виде:

$$\Delta P_{\text{H}} = k_{\text{p}} \Delta U_{\text{H}}. \quad (1.17)$$

Для определения  $k_{\text{p}}$  возьмем производную от исходной функции (1.8):

$$\frac{dP_{\text{H}}}{dU_{\text{H}}} = \frac{d(U_{\text{H}}^2/R)}{dU_{\text{H}}} = \frac{2U_{\text{H}}}{R}. \quad (1.18)$$

Подставив в это выражение  $U_{\text{H}} = U_{\text{H}0}$ , получим:

$$k_{\text{p}} = \left( \frac{dP_{\text{H}}}{dU_{\text{H}}} \right)_{U_{\text{H}}=U_{\text{H}0}} = \frac{2U_{\text{H}0}}{R}. \quad (1.19)$$

С учетом выражения (1.19) линеаризованное уравнение мощности нагревательного элемента (1.17) примет вид:

$$\Delta P_{\text{H}} = \frac{2U_{\text{H}0}}{R} \Delta U_{\text{H}}. \quad (1.20)$$

Таким образом, нелинейную модель САР (1.16) с учетом уравнения (1.17) можно рассматривать как линеаризованную математическую модель.

Известно [6–11], что линейные и линеаризованные математические модели САР в виде дифференциальных и алгебраических уравнений могут быть представлены соответствующими им передаточными функциями (подробно о передаточных функциях см. п. А.2 приложения А). Для рассматриваемой САР передаточные функции, полученные в результате преобразования уравнений (1.4), (1.7), (1.14), (1.15), (1.17) по Лапласу при нулевых начальных условиях, примут вид:

- передаточная функция камеры по регулирующему воздействию:

$$W_{\text{кп}}(s) = \frac{\theta_{\text{к}}(s)}{\theta_{\text{H}}(s)} = \frac{k_{\text{к}}}{T_{\text{к}}s + 1};$$

- передаточная функция камеры по возмущающему воздействию:

$$W_{\text{кв}}(s) = \frac{\theta_{\text{к}}(s)}{\theta_{\text{о}}(s)} = \frac{k_{\text{о}}}{T_{\text{к}}s + 1};$$

- передаточная функция термопары:

$$W_{\text{т}}(s) = \frac{E(s)}{\theta_{\text{к}}(s)} = \frac{k_{\text{т}}}{T_{\text{т}}s + 1};$$

- передаточная функция нагревателя по каналу мощности  $P$ :

$$W_{\text{н1}}(s) = \frac{\theta_{\text{н}}(s)}{P_{\text{н}}(s)} = \frac{k_{\text{н}}}{T_{\text{н}}s + 1};$$

- передаточная функция нагревателя по каналу температуры  $\theta_{\text{к}}$ :

$$W_{\text{н2}}(s) = \frac{\theta_{\text{н}}(s)}{\theta_{\text{к}}(s)} = \frac{1}{T_{\text{н}}s + 1};$$

- передаточная функция, соответствующая линеаризованному уравнению (1.17):

$$W_{\text{р}}(s) = \frac{\Delta P(s)}{\Delta U_{\text{н}}(s)} = k_{\text{р}};$$

- передаточная функция электронного усилителя:

$$W_{\text{у}}(s) = \frac{U_{\text{у}}(s)}{\Delta U(s)} = k_{\text{у}};$$

- передаточная функция тиристорного регулятора напряжения:

$$W_{\text{тр}}(s) = \frac{U_{\text{н}}(s)}{U_{\text{у}}(s)} = k_{\text{тр}},$$

где  $\theta_{\text{к}}(s)$ ,  $\theta_{\text{н}}(s)$ ,  $\theta_{\text{о}}(s)$ ,  $E(s)$ ,  $P_{\text{н}}(s)$ ,  $\Delta P_{\text{н}}(s)$ ,  $U_{\text{н}}(s)$ ,  $\Delta U_{\text{н}}(s)$ ,  $U_{\text{у}}(s)$ ,  $\Delta U(s)$  – изображения по Лапласу соответственно температуры в камере  $\theta_{\text{к}}$ , нагревателя  $\theta_{\text{н}}$ , окружающей атмосферы  $\theta_{\text{о}}$ , ЭДС  $E$  термопары, мощности  $P_{\text{н}}$  и ее отклонения  $\Delta P_{\text{н}}$ , напряжения  $U_{\text{н}}$  и его отклонения  $\Delta U_{\text{н}}$ , напряжения  $U_{\text{у}}$  и сигнала рассогласования  $\Delta U$  при нулевых начальных условиях.

Интерпретация математических моделей автоматических систем совокупностью передаточных функций объекта регулирования и элементов регулятора позволяет представлять математические модели САР графически в виде структурных схем [6–11], которые достаточно просто составить на основе заданных функциональных схем и передаточных функций (подробно о структурных схемах см. в п. А.2 приложения А). Применительно к рассматриваемому примеру структурная схема САР (см. рис. 1.1) в соответствии с ее функциональной схемой и приведенными выше передаточными функциями будет иметь вид, показанный на рис. 1.3.

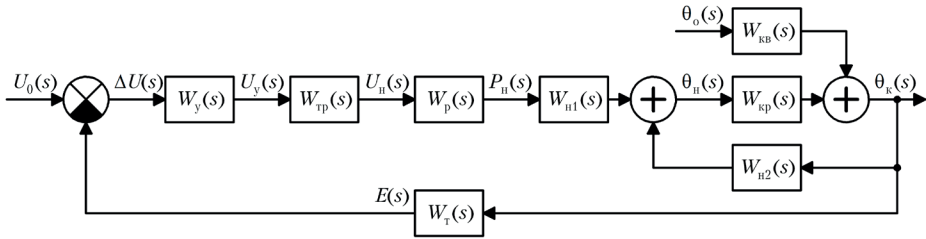


Рис. 1.3. Структурная схема линейризованной САР температуры в термической камере

На структурных схемах вместо изображений переменных (входных и выходных величин) допускается указывать их оригиналы, что существенно повышает их дидактичность и физическую наглядность.

Если математический аппарат передаточных функций применим только для линейных и линейризованных САР, то графические представления динамических свойств автоматических систем с использованием структурных схем можно использовать также для любых нелинейных САР. На структурных схемах можно отображать нелинейные зависимости, заданные как аналитически, так и графически.

При графическом представлении нелинейностей в звеньях структурных схем указывают соответствующие им графики. Если нелинейность задана в виде функциональных зависимостей, то в звеньях структурных схем отображают соответствующие формулы или адекватные им условные графические обозначения. На рис. 1.4 в качестве примера показаны структурные схемы некоторых нелинейных звеньев и элементов, где:  $a$  – звено, реализующее умножение двух входных величин  $X_{\text{ВЫХ}} = X_{\text{ВХ1}} \cdot X_{\text{ВХ2}}$ ;  $b$  – звено, реализующее деление одной входной величины на другую  $X_{\text{ВЫХ}} = X_{\text{ВХ2}} / X_{\text{ВХ1}}$ ;  $в$  – звено, реализующее извлечение квадратного корня из входной величины  $X_{\text{ВЫХ}} = \sqrt{X_{\text{ВХ}}}$ ;  $г$  – двухпозиционный элемент с зоной нечувствительности и гистерезисом;  $д$  – трехпозиционный релейный элемент с зоной нечувствительности;  $е$  – трехпозиционный элемент с зоной нечувствительности и гистерезисом.

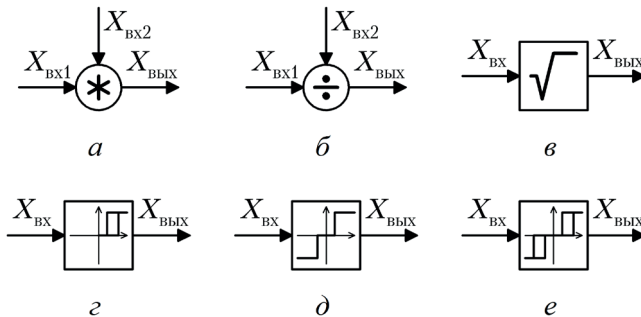


Рис. 1.4. Примеры структурных схем некоторых нелинейных звеньев и элементов

На основе изложенного выше исходную нелинейную математическую модель САР температуры в термической камере (1.16) можно представить в виде структурной схемы (рис. 1.5).

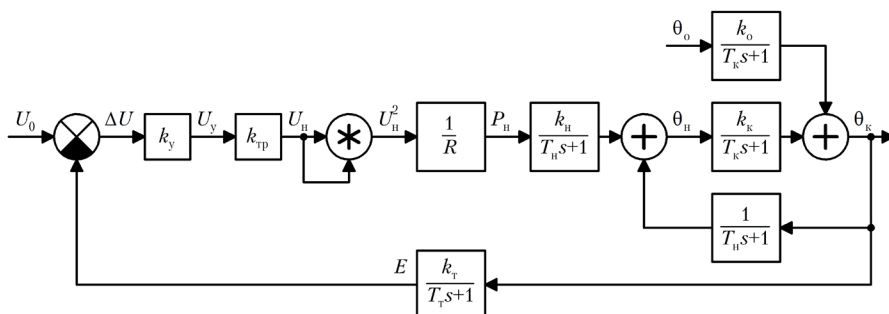


Рис. 1.5. Структурная схема нелинейной САР температуры в термической камере

Обобщая изложенное, можно отметить следующее: основные математические модели САР – это системы дифференциальных и алгебраических уравнений, а также полученные на их основе передаточные функции и структурные схемы.

**Примечание:** исходной базой рассмотренных математических моделей САР являются системы дифференциальных и алгебраических уравнений, в которых входные и выходные переменные (координаты) представляют собой реальные величины или малые отклонения от их абсолютных значений, соответствующих установившемуся режиму с определенными физическими размерностями. Помимо такого подхода, могут применяться модели на основе уравнений, записанных в безразмерной форме, в которых переменные представлены в безразмерном виде (в относительных единицах). Методику преобразования исходных уравнений в безразмерную форму можно найти в ряде учебников по теории автоматического регулирования и управления [8, 9]. Для целей компьютерного моделирования САР, исходя из физической наглядности процессов регулирования, целесообразно использовать математические модели, координаты которых представлены в поименованных единицах.

Кроме рассмотренных выше форм представления математических моделей, в теории автоматических систем используются математические модели в векторно-матричной форме (в пространстве состояний), сущность которых рассмотрена далее в п. 1.1.2.

### 1.1.2. Математические модели САР в пространстве состояний

Поведение любой САР во времени при определенных значениях входных воздействий (координат)  $g_1 \dots g_m$  можно характеризовать не только выходными величинами системы  $y_1 \dots y_k$ , но и ее переменными  $x_1 \dots x_n$ , число которых равно порядку

системы  $n$  [6, 10]. Посредством перевода исходной системы дифференциальных уравнений в форму Коши, с использованием входных, промежуточных и выходных координат, получают  $n$ -мерный вектор состояния, множество возможных сочетаний которого образует векторное пространство, называемое пространством состояний системы (рис. 1.6).

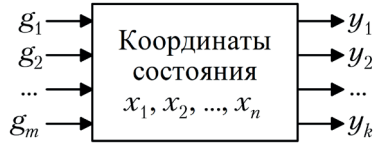


Рис. 1.6. К понятию пространства состояний системы

Рассмотрим в общем случае линейную (линеаризованную) САР (рис. 1.6), описываемую системой дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bg; \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1.21)$$

где  $x$  – вектор состояния системы,  $y$  – вектор выходных величин,  $g$  – вектор внешних воздействий (задающих и возмущающих), а именно:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_m \end{bmatrix}.$$

Через  $A, B, C$  обозначены:

- собственная параметрическая матрица системы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- входная матрица системы:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix};$$

- выходная матрица системы:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix}.$$

Процессы в системе в свободном движении (без внешних воздействий), согласно (1.21), описываются векторно-матричным уравнением

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.22)$$

или в развернутом виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ \dots; \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (1.23)$$

Эти уравнения дают возможность исследовать переходные процессы в автоматической системе с помощью компьютерных программ, реализующих численные методы решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим, в качестве примера, вывод уравнений состояния для замкнутой системы регулирования – электромеханической следящей системы [6], представленной на рис. 1.7, где: Д – двигатель постоянного тока; РМ – рабочий механизм; ЗУ – задающий механизм; РО – рабочая ось; ЗО – задающая ось; П и П<sub>0</sub> – измерительный и задающий потенциометрические датчики угловых перемещений; Т и Т<sub>0</sub> – измерительный и задающий тахогенераторные датчики угловых скоростей; УН – усилитель напряжения; УМ – усилитель мощности; R<sub>ш</sub> – резистор для контроля тока двигателя; ДТ – датчик тока якоря двигателя; УВ<sub>φ</sub> – устройство (схема) вычитания (сравнения) сигналов датчиков угловых перемещений; УВ<sub>ω</sub> – устройство (схема) вычитания (сравнения) сигналов датчиков угловых скоростей; УВ<sub>U</sub> – устройство (схема) вычитания (сравнения) сигналов усилителя напряжения и токовой обратной связи; УС – устройство (схема) сложения сигналов рассогласования датчиков угловых перемещений и угловых скоростей.

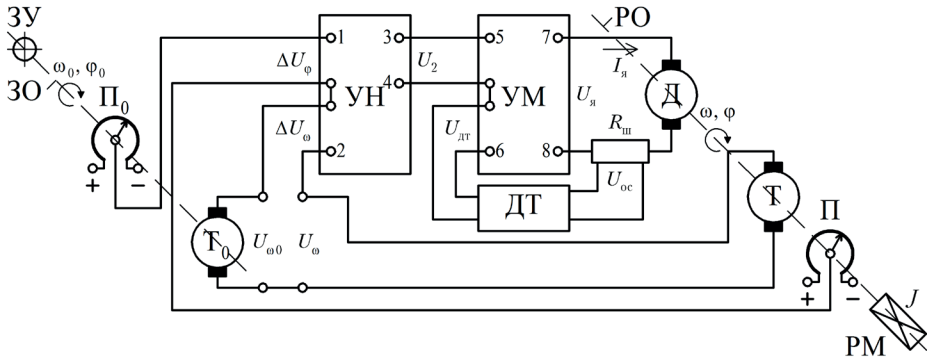
В системе, кроме главного контура регулирования по углу поворота вала двигателя, введены дополнительный контур регулирования по его скорости вращения и отрицательная обратная связь по току якоря. На схеме датчики угловых перемещений П и П<sub>0</sub> изображены как однооборотные, в реальной системе они выполнены в виде многооборотных потенциометрических преобразователей.

Величины, обозначенные на рис. 1.7 и далее по тексту латинскими и греческими буквенными символами, имеют следующий физический смысл:

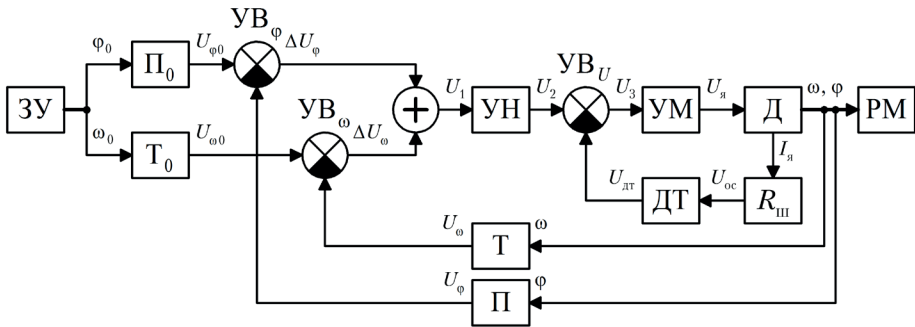
- φ и φ<sub>0</sub> – угловые перемещения рабочей и задающей осей, рад;
- ω и ω<sub>0</sub> – угловые скорости рабочей и задающей осей, рад/с;
- M<sub>д</sub> – момент двигателя, Н·м ( $M_d = k_m I_a$ ,  $k_m$  – конструктивная константа, Н·м/А);
- M<sub>с</sub> – момент сопротивления, Н·м ( $M_c = r\omega$ ,  $r$  – конструктивная константа, Н·м·с/рад);
- E<sub>д</sub> – ЭДС двигателя, В ( $E_d = k_e \omega$ ,  $k_e$  – конструктивная константа, В·с/рад);
- U<sub>я</sub> и I<sub>я</sub> – напряжение и ток якоря двигателя, В и А;
- U<sub>ос</sub> – напряжение обратной связи по току якоря двигателя, В;
- U<sub>дт</sub> – выходное напряжение датчика тока, В;
- U<sub>1</sub> и U<sub>2</sub> – напряжения на входе и выходе усилителя напряжения, В;



- $U_3$  – напряжение на входе усилителя мощности (см. рис. 1.7, в точках подключения 5, 6), В;
- $U_\varphi$  и  $U_{\varphi 0}$  – напряжения на выходе измерительного и задающего потенциометрических датчиков угловых перемещений, В;
- $U_\omega$  и  $U_{\omega 0}$  – напряжения на выходе измерительного и задающего тахогенераторных датчиков угловых скоростей, В;
- $\Delta U_\varphi$  – сигнал рассогласования угловых перемещений, В;
- $\Delta U_\omega$  – сигнал рассогласования угловых скоростей, В.



а



б

Рис. 1.7. Принципиальная (а) и функциональная (б) схемы следящей системы

Элементы и устройства, входящие в следящую систему (рис. 1.7), описываются следующими дифференциальными или алгебраическими уравнениями:

- электрическая цепь двигателя:

$$L_{я} \frac{dI_{я}}{dt} + R_{я} I_{я} + E_{д} = U_{я}, \quad (1.24)$$

где  $L_{я}$  и  $R_{я}$  – индуктивность и активное сопротивление обмотки якоря, Гн и Ом;

- механическая часть двигателя совместно с рабочим механизмом:

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_c = M_d, \quad (1.25)$$

где  $J$  – суммарный момент инерции ротора двигателя и приведенного к его валу общего момента инерции рабочего механизма, кг·м<sup>2</sup>;

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega; \quad (1.26)$$

- усилитель мощности:

$$U_y = k_{ym} U_3, \quad (1.27)$$

где  $k_{ym}$  – коэффициент усиления;

- отрицательная обратная связь по току:

$$U_3 = U_2 - U_{дт}; \quad (1.28)$$

- датчик тока, исходное уравнение которого  $U_{дт} = k_{дт} U_{oc}$ , с учетом сигнала обратной связи по току  $U_{oc} = R_{ш} I_y$ , в окончательном виде имеет уравнение:

$$U_{дт} = k_{дт} R_{ш} I_y, \quad (1.29)$$

где  $k_{дт}$  – коэффициент передачи датчика тока;  $R_{ш}$  – сопротивление резистора, Ом;

- усилитель напряжения:

$$U_2 = k_1 U_1, \quad (1.30)$$

где  $k_1$  – коэффициент усиления;

- операция сложения сигналов рассогласования  $\Delta U_\phi$  и  $\Delta U_\omega$ :

$$U_1 = \Delta U_\phi + \Delta U_\omega; \quad (1.31)$$

- операции сравнения электрических сигналов потенциометрических и тахогенераторных датчиков соответственно:

$$\Delta U_\phi = U_{\phi 0} - U_\phi \text{ и } \Delta U_\omega = U_{\omega 0} - U_\omega; \quad (1.32)$$

- потенциометрические датчики  $\Pi$  и  $\Pi_0$  угловых перемещений соответственно:

$$U_\phi = k_\Pi \phi \text{ и } U_{\phi 0} = k_\Pi \phi_0, \quad (1.33)$$

где  $k_\Pi$  – коэффициент передачи датчиков, В/рад;

- тахогенераторные датчики  $T$  и  $T_0$  угловых скоростей  $\omega$  и  $\omega_0$  соответственно:

$$U_\omega = k_T \omega \text{ и } U_{\omega 0} = k_T \omega_0, \quad (1.34)$$

где  $k_T$  – коэффициент передачи датчиков, В·с/рад.

Приведем исходную систему уравнений (1.24)–(1.34) к системе трех дифференциальных уравнений, связывающих координаты  $I_y$ ,  $\omega$  и  $\phi$  с входными координатами  $\omega_0$  и  $\phi_0$ . Для этого последовательной подстановкой уравнения (1.27)–(1.34) сведем к одному уравнению следующего вида:

$$U_{я} = k_{ум}k_1[k_{п}(\Phi_0 - \Phi) + k_{т}(\omega_0 - \omega)] - k_{ум}k_{дт}R_{ш}I_{я}. \quad (1.35)$$

Подставляя в уравнения (1.24)–(1.25) выражения (1.35),  $E_{д} = k_e\omega$ ,  $M_{д} = k_m I_{я}$  и  $M_c = r\omega$ , получим:

$$L_{я} \frac{dI_{я}}{dt} + R_{я}I_{я} + k_e\omega = k_{ум}k_1[k_{п}(\Phi_0 - \Phi) + k_{т}(\omega_0 - \omega)] - k_{ум}k_{дт}R_{ш}I_{я}; \quad (1.36)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + r\omega = k_m I_{я}. \quad (1.37)$$

После преобразования (1.36) и (1.37) в форму Коши, с учетом (1.26), система дифференциальных уравнений, описывающая динамику следящей системы, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{я}}{dt} = & - \left( \frac{R_{я}}{L_{я}} + k_{ум}k_{дт} \frac{R_{ш}}{L_{я}} \right) I_{я} - \left( \frac{k_{ум}k_1k_{т}}{L_{я}} + \frac{k_e}{L_{я}} \right) \omega - \frac{k_{ум}k_1k_{п}}{L_{я}} \Phi + \\ & + \frac{k_{ум}k_1k_{т}}{L_{я}} \omega_0 + \frac{k_{ум}k_1k_{п}}{L_{я}} \Phi_0; \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{J} I_{я} - \frac{r}{J} \omega \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{J} I_{я} - \frac{1}{T_M} \omega, \quad (1.39)$$

при  $r/J = 1/T_M$  (здесь  $T_M$  – механическая постоянная времени);

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega. \quad (1.40)$$

Систему из трех уравнений (1.38), (1.39) и (1.40) запишем в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{я} \\ \omega \\ \Phi \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} - \left( \frac{R_{я}}{L_{я}} + \frac{k_{дт}k_{ум}R_{ш}}{L_{я}} \right) & - \left( \frac{k_e}{L_{я}} + \frac{k_1k_{ум}k_{т}}{L_{я}} \right) & - \frac{k_1k_{ум}k_{п}}{L_{я}} \\ \frac{k_m}{J} & - \frac{1}{T_M} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{я} \\ \omega \\ \Phi \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{k_1k_{ум}k_{т}}{L_{я}} & \frac{k_1k_{ум}k_{п}}{L_{я}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Введем обозначения координат вектора состояний следящей системы как  $I_{я} = x_1$ ;  $\omega = x_2$ ;  $\Phi = x_3$ , а также обозначим:

$$-\frac{k_1 k_{\text{YM}} k_{\text{II}}}{L_{\text{Я}}} = a_{13} = b_{12}, \quad \frac{k_m}{J} = a_{21}, \quad -\frac{R_{\text{Я}} + k_{\text{IT}} k_{\text{YM}} R_{\text{III}}}{L_{\text{Я}}} = a_{11},$$

$$-\frac{k_e + k_1 k_{\text{YM}} k_{\text{T}}}{L_{\text{Я}}} = a_{12}, \quad -\frac{1}{T_{\text{M}}} = a_{22}, \quad \frac{k_1 k_{\text{YM}} k_{\text{T}}}{L_{\text{Я}}} = b_{11}, \quad \omega_0 = g_1, \quad \Phi_0 = g_2.$$

В результате получим уравнение состояния следящей системы в векторной форме:

$$\dot{x} = Ax + Bg, \tag{1.41}$$

где  $x$  – вектор состояния системы;  $g$  – входной вектор, причем

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}.$$

Параметрическая матрица системы  $A$  и входная матрица  $B$  имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнению состояния следящей системы (1.41) соответствует следующая система уравнений в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}g_1 + b_{12}g_2; \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \cdot x_3; \\ \dot{x}_3 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3. \end{cases} \tag{1.42}$$

Дополним (1.41) выходным уравнением

$$y = Cx. \tag{1.43}$$

Так как в принятых обозначениях выходные величины  $\omega = x_2$  и  $\Phi = x_3$ , то в последнем уравнении координатами выходного вектора системы  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$  будут

$$y_1 = 0; y_2 = x_2 = \omega; y_3 = x_3 = \Phi, \text{ а выходная матрица системы } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно привести к стандартной векторной форме (1.21) уравнения состояния любой линеаризованной системы автоматического регулирования и управления. Для решения задачи их анализа и синтеза на основе моделей в пространстве состояний ПО SimInTech содержит специальный блок *Переменные состояния*. Кроме этого, в среде SimInTech эти задачи можно также решать

с помощью блока *Язык программирования*, используя непосредственно уравнения, записанные в форме Коши, к примеру (1.42), или применяя составленные на их основе структурные схемы, подобные схеме, показанной на рис. 1.8. Методика составления структурных схем на основе исходных уравнений рассмотрена в п. А.2 приложения А.

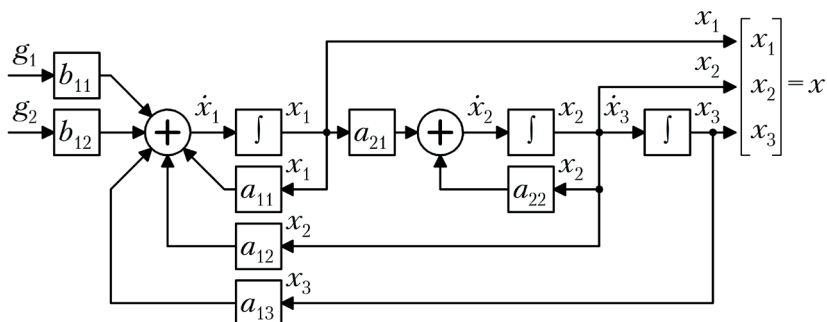


Рис. 1.8. Структурная модель следящей системы, соответствующая системе уравнений (1.42)

Для практической апробации процедур моделирования САР и САУ на основе моделей в пространстве состояний с использованием примера следящей системы можно воспользоваться следующими числовыми значениями параметров элементов и устройств с учетом вышепринятых обозначений и физических размерностей:  $k_{\Pi} = 0,26$  В/рад;  $k_{\tau} = 1$  В·с/рад;  $R_{\text{ш}} = 0,1$  Ом;  $k_{\text{дт}} = 15$ ;  $k_1 = \text{var}(5 \dots 50)$ ;  $k_{\text{ym}} = 26$ ;  $k_e = 2$  В·с/рад;  $k_m = 2$  Н·м/А;  $L_{\text{я}} = 0,13$  Гн;  $R_{\text{я}} = 2,6$  Ом;  $J = 0,115$  кг·м<sup>2</sup>;  $r = 0,23$  Н·м·с/рад;  $T_{\text{м}} = 0,5$  с [12].

## 1.2. Математические модели внешних воздействий

Любая САР подвержена влиянию возмущающих воздействий, которые зависят от изменяющихся внешних факторов и условий. В общем случае они представляют собой непрерывно изменяющиеся функции времени, точный закон которых невозможно предугадать. По причине сложности математического описания таких **случайных воздействий** при исследовании САР чаще всего применяют **детерминированные воздействия**, которые можно математически представить в виде непрерывных или дискретных функций времени. К числу детерминированных функций относятся непериодические и периодические функции времени. В каждом конкретном случае при выборе математической модели (математического

описания) входных воздействий исходят из физической сущности, реальных режимов работы и требований к процессу регулирования. В отдельных случаях, когда необходимо определить количественные оценки влияния реальных непредсказуемых воздействий на выходные координаты системы, эти воздействия представляют как случайные функции времени, для описания которых существует специальный математический аппарат, базирующийся на методах теории вероятностей. Сущность и характеристики **детерминированных** и **случайных воздействий** рассмотрены в следующих параграфах.

### 1.2.1. Детерминированные воздействия

**Ступенчатое воздействие** – одно из наиболее простых видов воздействий, в общем случае имеет вид, показанный на рис. 1.9. Аналитически оно записывается как

$$x(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau; \\ A & \text{при } t \geq \tau, \end{cases} \quad (1.44)$$

где  $\tau$  – момент «включения» скачка;  $A$  – величина входного воздействия.

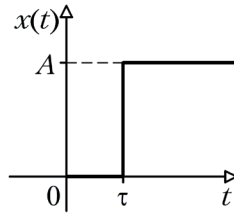


Рис. 1.9. График ступенчатого воздействия

**Импульсные воздействия** (рис. 1.10) описывают соответственно следующими зависимостями:

- прямоугольный импульс (рис. 1.10а):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_1; \\ A & \text{при } t \geq \tau_1, \text{ и } t < \tau_2; \\ 0 & \text{при } t \geq \tau_2; \end{cases} \quad (1.45)$$

- треугольный импульс (рис. 1.10б):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ A & \text{при } t = \tau_1; \\ 0 & \text{при } t \geq \tau_2. \end{cases} \quad (1.46)$$

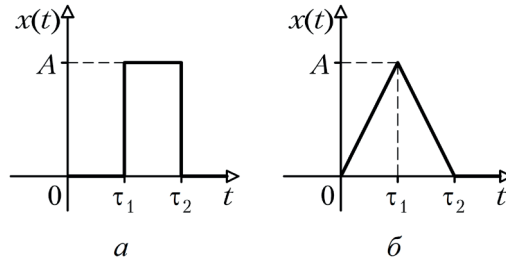


Рис. 1.10. Импульсные воздействия

**Линейное (рамповое) воздействие** в общем случае имеет график, показанный на рис. 1.11. Его аналитически описывают следующей формулой:

$$x(t) = a_0 1(t) + a_1 t, \quad (1.47)$$

где  $1(t)$  – единичное ступенчатое воздействие (рис. 1.11,  $\tau = 0$ ;  $A = 1$ );

$a_0$  – начальное значение воздействия,  $a_0 = x(0)$ ;

$a_1$  – коэффициент, определяемый углом наклона линейного воздействия как  $a_1 = \operatorname{tg}\alpha$ .

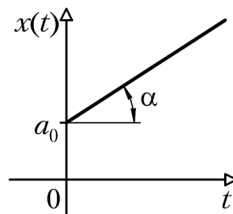
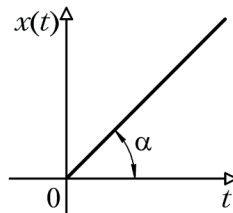


Рис. 1.11. График линейного воздействия

В частном случае при  $a_0 = 0$  график линейного воздействия имеет вид, показанный на рис. 1.12, а аналитическое выражение (1.47):

$$x(t) = a_1 t. \quad (1.48)$$


 Рис. 1.12. График линейного воздействия (1.47)  
при  $a_0 = 0$