

УДК 514.116
ББК 22.151
Т19

Тарасов В. А.

Т19 Прямые и обратные функции: теория и задачи с логарифмами, степенями, радикалами, тригонометрическими выражениями. – М.: ДМК Пресс, 2023. – 414 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-216-7

По единому плану, с использованием наглядного функционально-графического метода вводятся, изучаются, применяются в задачах (включая задачи ЕГЭ) следующие важные понятия: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа и соответствующие им функции.

Известны определенные трудности, которые сопровождают изучение и освоение этих важных понятий и функций. Специфика работы состоит в том, что для преодоления этих трудностей активно используются элементы сходства всех понятий и всех функций. Каждое понятие (арксинус, логарифм и др.) рассматривается как частный случай одного более общего понятия – «аргумент монотонной функции». Каждая функция рассматривается как частный случай одного общего понятия – «обратная функция».

Изложение теории закрепляется решением задач разной сложности со степенями, радикалами, логарифмами, тригонометрическими выражениями; описание современных методов решения задач повышенной сложности, в частности метода замены множителей для неравенств.

Сказанное облегчает изучение объективно сложного материала, подготовку к экзаменам, обучению в вузе.

Книга предназначена для школьников, учителей, студентов, всех любителей математики.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Материал, изложенный в данной книге, многократно проверен. Но, поскольку вероятность технических ошибок все равно существует, издательство не может гарантировать абсолютную точность и правильность приводимых сведений. В связи с этим издательство не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ISBN 978-5-93700-216-7

© Тарасов В. А., 2023
© Издание, оформление, ДМК Пресс, 2023

Оглавление

Введение	7
----------------	---

ЧАСТЬ I.

Аргумент монотонной функции и его частные случаи: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа.....	9
---	----------

Глава 1. Функция, основные сведения о монотонной функции.....	10
---	----

1.1. Введение	10
1.2. Функция.....	10
1.3. Область определения функции.....	12
1.4. Множество значений функции	13
1.5. Две основные задачи	14
1.6. Монотонность функции	15
1.7. Свойство монотонной функции.....	17
1.8. Аргумент монотонной функции.....	18
1.9. Выводы	19

Глава 2. Арксинус	20
-------------------------	----

2.1. Определения	20
2.2. Комментарии	21
2.3. График функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и значения арксинусов	22
2.4. Тригонометрический круг и значения арксинусов.....	23
2.5. Свойства арксинуса	25
2.6. Вычисления, преобразования выражений с арксинусом.....	30
2.7. Арксинус и уравнение $\sin t = a$	38
2.8. Арксинус и неравенство вида $\sin t \leq a$	46
2.9. Единый план для введения и изучения арксинуса и других понятий.....	52
2.10. Выводы.....	52

Глава 3. Арккосинус	54
---------------------------	----

3.1. Определения	54
3.2. График функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ и значения арккосинусов	56
3.3. Тригонометрический круг и значения арккосинусов.....	57
3.4. Свойства арккосинуса	58
3.5. Вычисления, преобразования выражений с арккосинусом.....	62
3.6. Арккосинус и уравнение $\cos t = a$	69
3.7. Арккосинус и неравенство вида $\cos t \leq a$	75
3.8. Выводы	78

Глава 4. Арктангенс.....	79
--------------------------	----

4.1. Определения	79
4.2. График функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и значения арктангенсов.....	81

4.3. Тригонометрический круг и значения арктангенсов	82
4.4. Свойства арктангенса	83
4.5. Вычисления, преобразования выражений с арктангенсом	86
4.6. Арктангенс и решение уравнения $\operatorname{tg} t = a$	94
4.7. Арктангенс и неравенство вида $\operatorname{tg} t \nu a$	100
4.8. Выводы	103
Глава 5. Арккотангенс	105
5.1. Определения	105
5.2. График функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ и значения арккотангенсов	107
5.3. Тригонометрический круг и значения арккотангенсов	108
5.4. Свойства арккотангенса	109
5.5. Вычисления, преобразования выражений с арккотангенсом	112
5.6. Арккотангенс и решение уравнения $\operatorname{ctg} t = a$	115
5.7. Арккотангенс и решение неравенства $\operatorname{ctg} t \nu a$	120
5.8. Выводы	125
Глава 6. Арифметический корень n -й степени, $n = 2, 3, 4, \dots$	126
6.1. Арифметический корень второй степени	126
6.2. Арифметический корень третьей степени	136
6.3. Арифметический корень n -й степени	140
6.4. Неарифметический (отрицательный) корень нечетной степени	142
6.5. Свойства арифметических корней, задачи	144
6.6. Иррациональные уравнения (теория)	151
6.7. Примеры иррациональных уравнений (практика)	152
6.8. Анализ подкоренных выражений	156
6.9. Выводы	157
Глава 7. Логарифм	158
7.1. Основные сведения о логарифмах	158
7.2. Основные формулы и особенности их применения	165
7.3. Дополнительные формулы (тождества)	169
7.4. Действия с логарифмами	172
7.5. Логарифм и решение показательных уравнений и неравенств	181
7.6. Показательно-степенные уравнения	187
7.7. Выводы	192
Заключение	194

ЧАСТЬ II.

Обратная функция и ее частные случаи. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \log_a x$

Глава 1. Основные сведения об обратной функции, методика ее получения	196
1.1. Монотонная функция	196
1.2. Что такое обратная функция	197
1.3. График обратной функции	198
1.4. Переобозначение переменных в обратной функции	200

1.5. Методика получения обратной функции и ее графика	200
1.6. Пример получения обратной функции и ее графика.....	201
1.7. Дифференцирование обратной функции.....	202
1.8. Выводы	203
Глава 2. Функция $y = \arcsin x$	205
2.1. Получение и график функции.....	205
2.2. Исследование и свойства функции.....	207
2.3. Задачи с функцией $y = \arcsin x$	210
2.4. Функция $y = \arcsin(\sin x)$ и ее график.....	225
2.5. Функция $y = \sin(\arcsin x)$ и ее график.....	227
2.6. Выводы	228
Глава 3. Функция $y = \arccos x$	229
3.1. Получение и график функции.....	229
3.2. Исследование и свойства функции.....	232
3.3. Задачи с функцией $y = \arccos x$	234
3.4. Функция $y = \arccos(\cos x)$ и ее график	246
3.5. Функция $y = \cos(\arccos x)$ и ее график	247
3.6. Выводы	248
Глава 4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$	249
4.1. Получение и график функции.....	249
4.2. Исследование, свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$	252
4.3. Задачи с функцией $y = \operatorname{arctg} x$	253
4.4. Функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и ее график.....	266
4.5. Функция $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ и ее график.....	267
4.6. Выводы	268
Глава 5. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$	269
5.1. Получение и график функции.....	269
5.2. Исследование, свойства функции.....	272
5.3. Задачи с функцией $y = \operatorname{arcctg} x$	274
5.4. Функция $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и ее график.....	287
5.5. Функция $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ и ее график.....	288
5.6. Выводы	288
Глава 6. Функция $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0, n = 2, 3, 4$	289
6.1. Получение и график функции.....	289
6.2. Исследование и свойства функции.....	292
6.3. Задачи с функцией $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$	294
6.4. Выводы	311
Глава 7. Функция $y = \log_a x, x > 0, 0 < a \neq 1$	312
7.1. Получение и график функции	312
7.2. Исследование и свойства логарифмической функции $y = \log_a x$	315
7.3. Задачи с функцией $y = \log_a x$	315
7.4. Выводы.....	334
Глава 8. Метод замены множителей.....	335
8.1. Описание метода	335

8.2. Таблица взаимозаменяемых множителей	337
8.3. Неравенства с обратными тригонометрическими функциями	341
8.4. Метод замены множителей в сложных неравенствах.....	346
8.5. Выводы	349
Глава 9. Метод перебора участков ОДЗ	351
9.1. Общие замечания; суть метода	351
9.2. Неравенство с арксинусом	352
9.3. Неравенство с арктангенсом.....	352
9.4. Неравенство с логарифмом.....	353
9.6. Выводы	358
Глава 10. Задачи с обратными функциями	359
10.1. Задачи с «арками»	359
10.2. Задачи с логарифмической функцией, радикалами, степенями, модулями, арками	392
10.3. Выводы	402
Упражнения для самостоятельной работы и ответы	403
Упражнения для самостоятельной работы к части I.....	403
Ответы к упражнениям для самостоятельной работы части I.....	405
Упражнения для самостоятельной работы к части II	405
Ответы к упражнениям для самостоятельной работы части II.....	409
Заключение.....	411
Литература.....	412

*Математика – там, где мало определений,
но много следствий*

Введение

В части I работы из одного понятия «аргумент монотонной функции» получаем важные частные случаи – понятия «арок» (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, арифметического корня, логарифма числа).

В части II из одного понятия «обратная функция» получаем важные частные случаи – функции $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \arctg x$; $y = \text{arcctg } x$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, 4, \dots$; $y = \log_a x$.

Формальные определения арок, корней, логарифмов мы узнаем в разное время, изолированно и, главное, – без акцента на взаимосвязь между ними. Видимо, в этом одна из причин (кроме объективной сложности) того, что эти определения бывает трудно понять, осознать, запомнить. Между тем все означенные понятия можно рассматривать как частные случаи одного общего понятия «аргумент монотонной функции», а он – результат решения известной обратной задачи, в которой ищется значение аргумента (независимой переменной) по известному значению функции (ее зависимой переменной).

Значению аргумента дается обозначение (например, « \arcsin ») и название (например, «арксинус»).

Именно так, естественным образом, по *единому плану, с графической иллюстрацией* получаем понятия:

- а) арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс для тригонометрических функций (главы 2–5 соответственно);
- б) арифметический корень для степенной функции (глава 6);
- в) логарифм для показательной функции (глава 7).

Изложение, содержание каждой из глав 2–7 идентично, подчинено единому плану:

- *рассматривается* обратная задача для конкретной (в этой главе) монотонной функции;
- ее единственному решению – аргументу исходной функции – *даются* общепринятые обозначения и названия;

- изучаются свойства этого аргумента и на их базе;
- излагаются методики решения задач разной степени сложности (в том числе задач ЕГЭ по математике).

Таково содержание части I.

В части II также по единому плану вводятся и изучаются *обратные функции*.

В главе 1 излагается общая теория, план введения обратной функции. В следующих главах по этому плану последовательно вводятся и изучаются конкретные обратные функции:

$$y = \arcsin x; y = \arccos x; y = \arctg x; y = \text{arcctg } x;$$

$$y = \sqrt[n]{x}, n = 2, 3, \dots; y = \log_a x.$$

Изучаются методы решения задач, в том числе метод замены множителя, метод перебора ОДЗ для неравенств.

Решаются разные по сложности задачи.

В заключении констатируется целесообразность принятого здесь единого подхода к введению, изучению и применению в задачах важных понятий:

- аргумент монотонной функции и его частные случаи: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа;
- обратная функция и ее частные случаи: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \arctg x$; $y = \text{arcctg } x$; $y = \sqrt[n]{x}, n = 2, 3, 4, \dots$; $y = \log_a x$.

Принятый подход включает наглядный функционально-графический метод, что помогает яснее понять смысл каждого из понятий, а значит, легче и увереннее его освоить. В результате формируются или закрепляются умения и навыки (ключи) для решения задач с арками, корнями, логарифмами, тригонометрическими функциями разной сложности, развивается общая математическая культура.

Изложение начнем с напоминания о том, что же такое *функция* и в чем специфика *монотонной функции*.

ЧАСТЬ I

**Аргумент монотонной функции
и его частные случаи:
арксинус, арккосинус,
арктангенс, арккотангенс,
арифметический корень,
логарифм числа**

Глава 1.

Функция, основные сведения о монотонной функции

1.1. Введение

Повторимся, математика – там, где *мало* определений, понятий, но *много* следствий, других понятий.

В данной работе в части I из *одного* понятия «аргумент монотонной функции» выводятся и изучаются его важнейшие *частные случаи*, а именно «арксинус», «арккосинус», «арктангенс», «арккотангенс», «арифметический корень», «логарифм числа».

Существенно, что все эти понятия вводятся единообразно, по одному плану с использованием наглядного функционально-графического метода: меняются лишь исходные монотонные функции. Но с каждой из них выполняются одни и те же действия, а именно находится и изучается ее аргумент. Именно этот аргумент для каждой конкретной функции носит свое конкретное название: арксинус, логарифм и т. д.

Изложенный подход позволяет не зубрить механически труднозапоминаемые определения и свойства, а получить и изучить их естественным образом в рамках изучения свойств исходных функций с наглядной графической иллюстрацией.

Понятно, что следует вспомнить и обсудить смысл основного для нас понятия «аргумент монотонной функции». Но без понятия «функция» здесь не обойтись. С него и начнем.

1.2. Функция

Понятие «функция» – одно из основных в математике. Напомним и прокомментируем его.

Определение. Функцией f называется закон (правило), который каждому допустимому значению независимой переменной, или аргументу, x из множества X сопоставляет единственное значение зависимой переменной y :

$$y = f(x), x \in X. \quad (1)$$

Закон f должен удовлетворять только *одному* требованию – обеспечить *единственность от x к y* :

$$x \xrightarrow{f} y.$$

В чем смысл этого требования, откуда оно?

Из жизни. Объект не может находиться одновременно в двух точках пространства.

Пример: поход ученика в школу и обратно; пусть x – время, y – расстояние до дома. График функции $y = f(x)$ схематически дан на рис. 1.1.

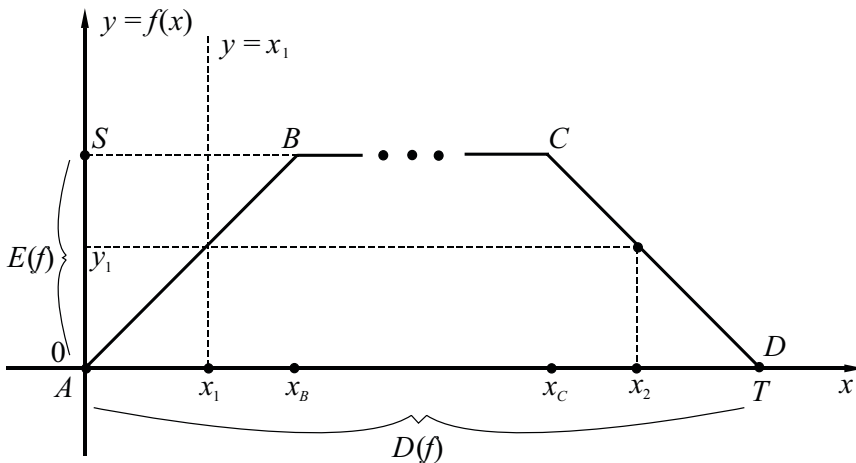


Рис. 1.1

В каждый момент времени расстояние от дома фиксировано, единственно. Например, при $x = x_1$, $y_1 = f(x_1)$. Ученик не может находиться в двух местах одновременно. Но расстояние от дома равно y_1 и в момент времени x_2 , когда ученик возвращается домой; расстояние остается постоянным, равным S , при всех $x \in [x_B; x_C]$, пока ученик в школе.

То есть *однозначности от y к x не требуется*.

Важно. Единственность от x к y графически означает следующее. Любая вертикальная прямая $y = x_1 \in [0; T]$ пересекает график функции в единственной точке $(x_1; f(x_1))$ (см. рис. 1.1).

Выше сформулировано определение функции. Следующей задачей проверим, как мы его поняли.

Задача. Какие кривые из рис. 1.2 являются графиками функций?

Ответ. Кривые на рис. 1.2б и 1.2в.

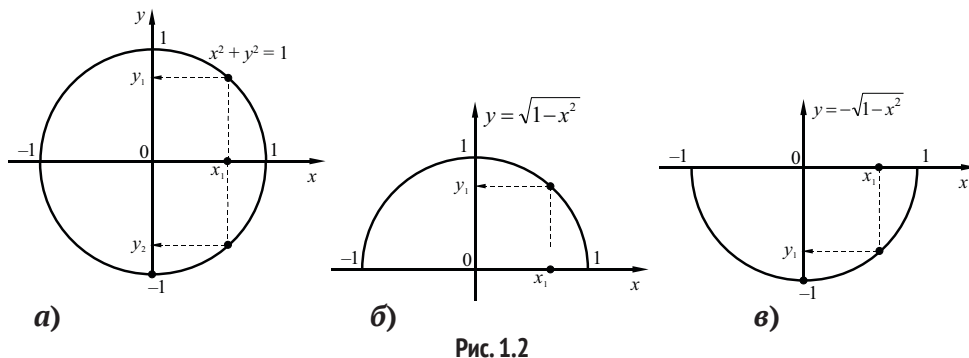


Рис. 1.2

Действительно, здесь обеспечивается единственность от x к y .

На рис. 1.2а этой единственности нет:

Числу x_1 соответствуют два числа y_1 и y_2 . Здесь изображен график уравнения $x^2 + y^2 = 1$ – окружности с центром в точке $O(0; 0)$ радиуса $R = 1$.

На рис. 1.2б и 1.2в изображены верхняя и нижняя полуокружности – графики функций $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$ соответственно.

Итак, мы вспомнили и обсудили определение функции. Каждую функцию характеризуют два множества – область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$. С каждой функцией связаны две задачи – прямая и обратная. Обсудим эти важные понятия.

1.3. Область определения функции

Область определения функции f называют множество всех допустимых значений аргумента. Ее обозначают символом $D(f)$ и часто называют областью допустимых значений – ОДЗ. Кратко: ОДЗ – это множество всех допустимых значений независимой переменной. Область определения может быть задана явно, как в (1). Здесь $D(f) = X$.

Если множество X не указано, то за область определения $D(f)$ принимается естественная ОДЗ выражения $f(x)$.

Примеры, см. рис. 1.1–1.3.

- 1) $f(x) = x^2$. Здесь $D(f) = R$ – множество всех действительных чисел.
- 2) $f(x) = x^2, x \in [-1; 2]$. Здесь $D(f) = [-1; 2]$.
- 3) Область определения функции из рис. 1.1 – отрезок $[0; T]$.
- 4) Область определения функций из рис. 1.2б, 1.2в – отрезок $x \in [-1; 1]$.

Графически: область определения $D(f)$ – это проекция графика функции на ось x .

1.4. Множество значений функции

Множеством (или областью) *значений функции* называют множество всех возможных значений *зависимой переменной*. Его обозначают символом $E(f)$.

Графически: множество значений $E(f)$ – это проекция графика функции на ось ординат.

Примеры, см. рис. 1.1–1.3.

- 1) $f(x) = x^2$. Здесь $E(f) = [0; +\infty)$, т. е. зависимая переменная y пробегает множество *всех* неотрицательных чисел.
- 2) $f(x) = x^2$, $x \in [-1; 2]$. Здесь $E(f) = [0; 4]$, т. е. зависимая переменная y пробегает *все* значения из отрезка $[0; 4]$.
- 3) Множество значений функции есть:
 - а) отрезок $[0; 5]$ для функции из рис. 1.1;
 - б) отрезок $[0; 1]$ для функции из рис. 1.2б;
 - в) отрезок $[-1; 0]$ для функции из рис. 1.2в.

Фраза «Множество $E(f)$ есть множество значений функции f » означает:

- а) при любом $x \in D(f)$ значение $y = f(x)$ существует, единственно и принадлежит множеству $E(f)$, т. е.

$$x \in D(f) \Rightarrow y = f(x) \in E(f);$$

- б) обратно. Любое значение $y \in E(f)$ достигается хотя бы при одном значении x , $x \in D(f)$, т. е. совместна система относительно x (при заданном y):

$$\begin{cases} f(x) = y \\ y \in E(f) \end{cases}$$

Например, значение $y = \frac{1}{4} \in [0; 4]$ достигается при $x = \pm \frac{1}{2}$, рис. 1.3б;

- в) если значение \bar{y} не из множества $E(f)$, то оно не достигается ни при каком $x \in D(f)$, т. е. не совместна (относительно x) система

$$\begin{cases} f(x) = \bar{y}, \bar{y} \notin E(f) \\ x \in D(f) \end{cases}$$

Например, значение $\bar{y} = 9 \notin [0; 4]$ не достижимо для функции $f(x) = x^2$, $x \in [-1; 2]$, (рис. 1.3б), но достижимо для другой функции $f(x) = x^2$ при $x = \pm 3$ (рис. 1.3а).

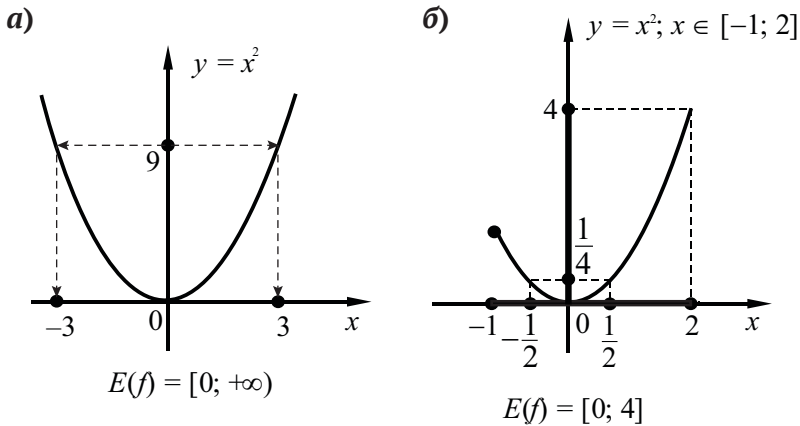


Рис. 1.3

Мы разобрали понятие «множество значений функции». Рассмотрим задачу с параметром на это понятие в общем виде.

Задача. Найти все значения параметра « a », при каждом из которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a \in E(f)$.

Конкретный пример. Пусть $f(x) = x^2, x \in [-1; 2]$, рис. 1.3б. Тогда зависимая переменная $y = f(x)$ пробегает все значения множества $E(f) = [0; 4]$ и только из него. Значит, уравнение $f(x) = a$ разрешимо лишь при $a \in [0; 4]$.

1.5. Две основные задачи

Мы видели, что в каждой функции $y = f(x)$:

- аргумент, независимая переменная x , пробегает все значения из множества $D(f)$ – области определения функции, $x \in D(f)$;
- зависимая переменная y при этом пробегает все значения из множества $E(f)$ – множества значений функции, $y \in E(f)$;
- закон f каждому значению $x \in D(f)$ сопоставляет единственное значение $y \in E(f)$.

$$x \xrightarrow{f} y.$$

Взаимосвязи зависимой и независимой переменных (y и x) характеризуют две основные задачи.

- 1) *Прямая задача.* По заданному значению аргумента $x \in D(f)$ найти значение зависимой переменной y .

Задача сводится к вычислению значения y по x :

$$y = f(x), \text{ где } x \in D(f). \quad (2)$$

Значение $f(x)$ существует (может быть вычислено) для любого допустимого значения x , т. е. для x из области определения функции. Если $x \notin D(f)$, то значение y не существует для данной функции f . Например, для рис. 1.1 значение зависимой переменной y существует для любого $x \in [0; T]$ и только для такого x .

Итак, в прямой задаче по заданному x требуется вычислить y .

- 2) *Обратная задача.* Найти все значения аргумента x , при каждом из которых достигается заданное значение зависимой переменной y_0 .

Здесь следует решить относительно x уравнение

$$f(x) = y_0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2, \dots\}. \quad (3)$$

Это уравнение разрешимо при любом достижимом значении y_0 , т. е. при любом $y_0 \in E(f)$.

Например, значение y_1 на рис. 1.1 достигается при двух значениях x_1, x_2 аргумента.

Важен случай, когда обратная задача (3) имеет *единственное* решение при любом $y_0 \in E(f)$:

$$\begin{cases} f(x) = y_0 \\ y_0 \in E(f) \end{cases} \Leftrightarrow x = x_0.$$

Если исходная функция f монотонна, то указанная единственность имеет место. То есть, если f – монотонная функция, то:

- не только каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y (как для любой функции), но и
- каждое возможное значение y достигается только при одном значении x .

Рассмотрим сказанное подробнее, для чего вспомним определение и свойства монотонной функции.

1.6. Монотонность функции

Рассмотрим функцию (1)

$$y = f(x), x \in X.$$

Определение. Функция f называется монотонно возрастающей (или просто возрастающей) на множестве X , если для любых двух значений x_1, x_2 аргумента x из этого множества таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$:

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \\ x_1, x_2 \in X \end{cases} \stackrel{f}{\Rightarrow} f(x_2) > f(x_1). \quad (4)$$

По-иному. Функция f возрастает (или строго возрастает) на множестве X , если большему значению аргумента x на нем соответствует большее значение зависимой переменной y (рис. 1.4).

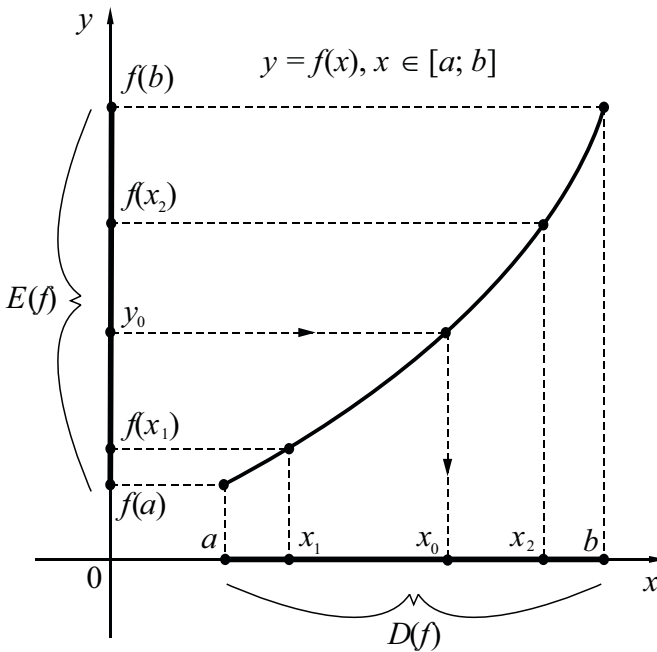


Рис. 1.4

На рис. 1.4 изображен график возрастающей функции

$$y = f(x), \quad x \in [a; b].$$

При возрастании аргумента x от « a » до « b » зависимая переменная « y » монотонно возрастает от $f(a)$ до $f(b)$.

Определение. Функция f называется монотонно убывающей (или просто убывающей) на множестве X , если для любых двух значений x_1, x_2 аргумента x из этого множества таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$:

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \\ x_1, x_2 \in X \end{cases} \xRightarrow{f} f(x_2) < f(x_1). \quad (5)$$

По-иному. Функция f убывает на множестве X , если бóльшему значению аргумента на нем соответствует мéньшее значение зависимой переменной y (рис. 1.5).

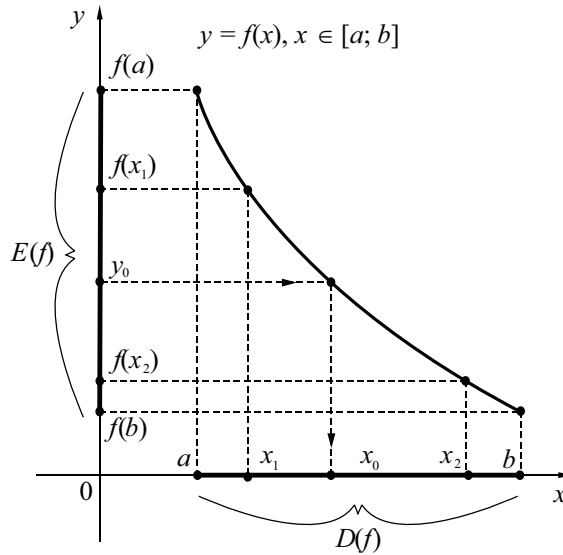


Рис. 1.5

На рис. 1.5 изображен график убывающей функции

$$y = f(x), \quad x \in [a; b].$$

При возрастании аргумента « x » от « a » до « b » зависимая переменная « y » убывает от $f(a)$ до $f(b)$, где $f(a) > f(b)$.

Под монотонностью функции везде подразумеваем ее строгую монотонность, т. е. возрастание или убывание.

1.7. Свойство монотонной функции

Рисунки 1.4 и 1.5 иллюстрируют отличительное свойство монотонной функции: каждое значение y_0 из множества значений $E(f)$ достигается ею при единственном значении аргумента x_0 . Докажем это.

Теорема. Пусть $D(f)$ – область определения, $E(f)$ – множество значений функции f . Тогда если функция f монотонна, то уравнение

$$f(x) = y_0 \quad (6)$$

имеет единственное решение $x_0 \in D(f)$ для любого $y_0 \in E(f)$.

Доказательство. Уравнение (6) имеет хотя бы одно решение, поскольку $y_0 \in E(f)$ по условию.

Так как f – монотонная функция, то уравнение (6) имеет только одно решение $x_0 \in D(f)$. Действительно, пусть найдется такое $y_0 \in E(f)$, которое достигается хотя бы при двух значениях $x_1 \neq x_2$ аргумента:

$$\begin{cases} f(x_1) = y_0 \\ f(x_2) = y_0 \end{cases}$$

Тогда $f(x_1) = f(x_2)$, что противоречит монотонности функции: если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Теорема доказана. Повторимся: далее будем говорить об аргументе именно строго монотонной функции.

1.8. Аргумент монотонной функции

Итак, если f – монотонная функция, то:

- каждому значению аргумента x соответствует единственное значение зависимой переменной y , как и для всякой функции; обратно
- каждое значение $y_0 \in E(f)$ зависимой переменной достигается только при одном значении x_0 аргумента

$$(7) \quad \begin{cases} f(x) = y_0 \\ y_0 \in E(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x_0 \in D(f) \end{cases} \quad (8)$$

Подчеркнем. Система (7) имеет единственное решение x_0 при любом $y_0 \in E(f)$. Это значение x_0 аргумента называют по-разному для разных конкретных монотонных функций f .

Перечислим важнейшие названия аргумента (числа) x_0 в нижеследующем общем определении.

Общее определение.

Значение аргумента x_0 строго монотонной функции $y = f(x)$, при котором ее зависимая переменная y достигает значения y_0 , называется:

- арксинусом числа y_0 (обозначение $x_0 = \arcsin y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad (9)$$

- арккосинусом числа y_0 (обозначение $x_0 = \arccos y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = \cos x, x \in [0; \pi]; \quad (10)$$

- арктангенсом числа y_0 (обозначение $x_0 = \operatorname{arctg} y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \quad (11)$$

- арккотангенсом числа y_0 (обозначение $x_0 = \operatorname{arcctg} y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (0; \pi); \quad (12)$$

- арифметическим корнем n -й степени из числа y_0 (обозначение $x_0 = \sqrt[n]{y_0}$, $n = 2, 3, 4, \dots$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = x^n, x \geq 0; \quad (13)$$

- логарифмом числа y_0 при основании a (обозначение $x_0 = \log_a y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = a^x, 0 < a \neq 1. \quad (14)$$

Обсуждение. Приведенное общее определение сразу для всех изучаемых понятий, конечно, полезно. Оно констатирует их изначальную суть, схожесть, а именно – их общее свойство быть аргументом своей конкретной функции $y = f(x)$. Но и функции (9–14), а значит, и их аргументы (изучаемые понятия) имеют разные индивидуальные свойства.

Строго определить, изучить и затем использовать в задачах каждое понятие можно единообразно, по одному плану, с использованием наглядного функционально-графического метода.

Далее подробно рассматривается каждый из этих частных случаев, нумерация формул, рисунков в каждой главе начинается заново.

1.9. Выводы

1. *Рассмотрели* важные понятия: функция, ее область определения и множество значений; монотонная функция.
2. *Отметили* важное свойство монотонной функции: каждое ее значение y_0 достигается только при одном значении x_0 аргумента.
3. *Привели* названия и обозначения аргумента x_0 для основных шести монотонных функций. Эти названия и понятия таковы: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа.
4. *Каждое* из приведенных понятий требует отдельного рассмотрения и изучения. В следующей главе изучается арксинус числа.